

Формула длины окружности. Запись, вывод

Представим, что окружность сделана из тонкой нерастяжимой нити. Если ее разрезать в какой-нибудь точке A и распрямить ее, то получится отрезок AA_1 , длина которого и будет длиной окружности (рис. 1).

Рис. 1



Периметр любого правильного вписанного в окружность многоугольника является приближенным значением длины окружности. Чем больше число сторон такого многоугольника, тем точнее это приближенное значение, так как многоугольник при увеличении числа сторон все ближе и ближе «прилегает» к окружности (рис. 2).

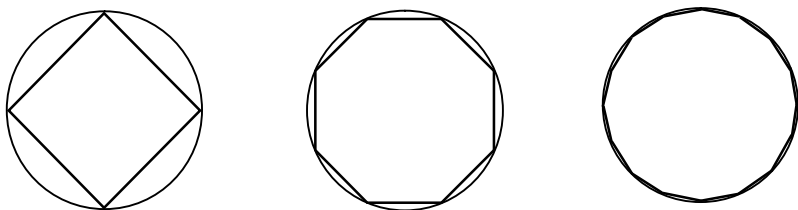


Рис. 2

Точное значение длины окружности – это предел, к которому стремится периметр правильного вписанного в окружность многоугольника при неограниченном увеличении числа его сторон.

Выведем формулу, выражающую длину окружности через ее радиус. Пусть C и C' – длины окружностей радиусов R и R' . Впишем в каждую из них правильный n -угольник и обозначим через P_n и P'_n их периметры, а через a_n и a'_n их стороны. Используя формулу для нахождения стороны правильного многоугольника через радиус описанной окружности $a_n = 2R \sin \frac{180^\circ}{n}$, получаем:

$$P_n = n \cdot a_n = n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n}, \quad P'_n = n \cdot a'_n = n \cdot 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}.$$

Следовательно, $\frac{P_n}{P'_n} = \frac{n \cdot 2R \sin \frac{180^\circ}{n}}{n \cdot 2R' \sin \frac{180^\circ}{n}} = \frac{2R}{2R'}$, отсюда

$$\frac{P_n}{P'_n} = \frac{2R}{2R'}. \quad (1)$$

Это равенство справедливо при любом значении n .

Будем неограниченно увеличивать число n .

При $n \rightarrow \infty$ $P_n \rightarrow C$, $P'_n \rightarrow C'$, поэтому предел отношения $\frac{P_n}{P'_n}$ равен $\frac{C}{C'}$. С другой стороны, в силу равенства (1) этот предел равен $\frac{2R}{2R'}$. Таким образом, $\frac{C}{C'} = \frac{2R}{2R'}$. По свойству пропорции

$\frac{C}{2R} = \frac{C'}{2R'}$, т.е. *отношение длины окружности к ее радиусу есть одно и то же число для всех окружностей*. Это число принято обозначать греческой буквой π (читается «пи»).

Из равенства $\frac{C}{2R} = \pi$ получаем формулу для вычисления длины окружности радиуса R :

$$C = 2\pi R.$$

Так как $D = 2R$, то получаем формулу для вычисления длины окружности диаметра D :

$$C = \pi D.$$

Замечание. Доказано, что π является бесконечной непериодической десятичной дробью, т.е. иррациональным числом. Рациональное число $\frac{22}{7}$ является приближенным значением числа π с точностью до 0,002. Это приближенное значение было найдено еще в III в. до н.э. великим греческим ученым Архимедом. При решении задач обычно пользуются приближенным значением π с точностью до 0,01, $\pi \approx 3,14$.